

УДК 532.59

ЕНЕРГІЯ ХВИЛЬ В ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ В ГАРНИЧНОМУ ВИПАДКУ

Нарадовий В. В., Харченко Д. С.

Робота присвячена дослідженню енергії внутрішніх хвильових рухів у граничному випадку за рівності густин верхнього та середнього шару у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – рідкий шар – шар з кришкою», коли вказана гідродинамічна система вироджується у систему «шар з твердим дном – шар з твердою кришкою».

The work is devoted to the study of the energy of internal wave motions in the limiting case for the equality of the densities of the upper and middle layers in the hydrodynamic system, «a layer with a solid bottom - a liquid layer - a layer with a lid». In this case a three-layer system is transform in system «a layer with a solid bottom - a layer with a lid».

Вступ. Практичний інтерес дослідження хвильових рухів в океані, а також взаємодії хвиль, пов'язаний, зокрема, з створенням та використанням приладів, установок які перетворюють енергію хвиль в електроенергію. Такі дослідження та розробки проводяться в Австралії, Данії, США, Японії, Британії та Китаї. Залежно від регіону, погодних умов та інших фізичних параметрів, хвилі мають різну структуру і особливості, так само як і у водах з різною стратифікацією густини. Стратифікація за густиною зустрічається у водах Північного Льодовитого океану, зокрема в Арктичному басейні. Тришарова стратифікація густини зустрічається в Південно-Китайському морі, Чорному та Балтійському морях.

Таким чином, актуальним є дослідження та аналіз проблеми про дослідження поширення енергії внутрішніх хвиль у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – рідкий шар – шар з кришкою».

Постановка задачі та метод дослідження. Досліджується задача про поширення тривимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 , рідкого шару над ним $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 та верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_1 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 . Шари Ω_1 і Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x, t)$, шари Ω_2 і Ω_3 розділені поверхнею контакту $z = \eta_2(x, t)$, а верхній шар обмежений згори кришкою. При розв'язанні

враховується сили поверхневих натягів на поверхнях контакту. Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис. 1).

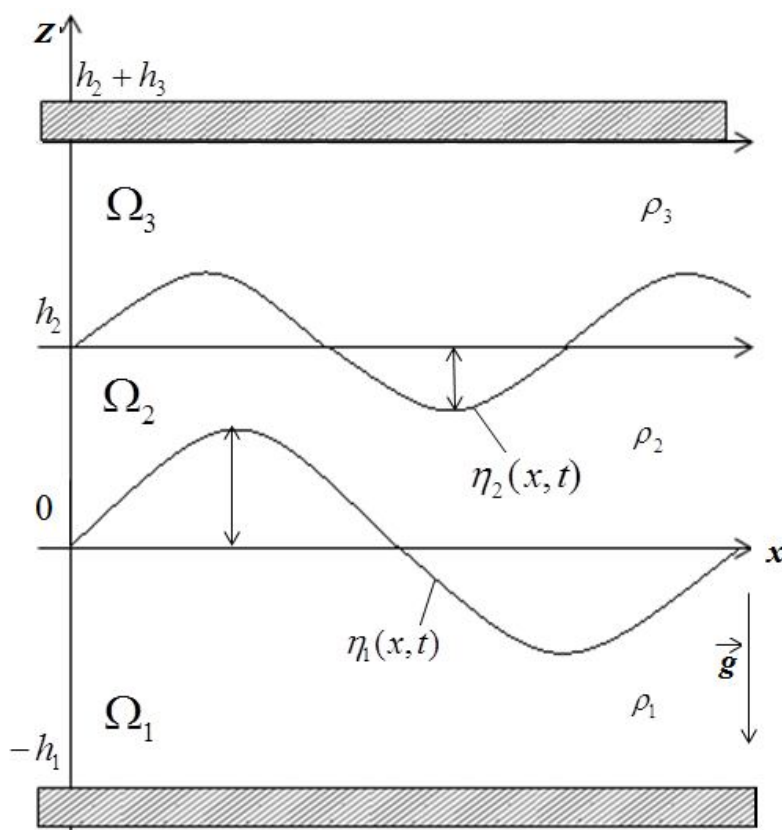


Рис 1. Постановка задачі

Математична постановка задачі має наступний вигляд:

швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \text{ у } \Omega_j, j=1,2,3 \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту та на поверхні з кришкою

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{1,x} \text{ при } z = \eta_1(x, t), j=1,2 \quad (2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{2,x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x, t), j=2,3 \quad (3)$$

динамічні умови на поверхнях контакту

$$\rho_1\varphi_{1,t} - \rho_2\varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - T_1\left(1 + (\eta_{1,x})^2\right)^{-\frac{3}{2}}\eta_{1,xx} = 0$$

при $z = \eta_1(x, t)$

$$\rho_2 \varphi_{2,t} - \rho_3 \varphi_{3,t} + g(\rho_1 - \rho_2) \eta_2 + \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \rho_3 (\nabla \varphi_3)^2 - T_1 \left(1 + (\eta_{2,x})^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \eta_{2,xx} = 0$$

при $z = h_2 + \eta_2(x, t)$

(4)

умова непроникливості на дні

$$\varphi_{1,z} = 0 \text{ при } z = -h_1,$$
(5)

умова непроникливості на поверхні з кришкою

$$\varphi_{3,z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3,$$

тут φ_j ($j = 1, 2, 3$) потенціали швидкості частинок в Ω_j , η_1, η_2 – відхилення поверхонь контакту, T_1, T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на відповідних поверхнях контакту, g – прискорення вільного падіння.

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерних довжини L та товщини H , максимального відхилення вільної поверхні a , характерного часу $L / (gH)^{1/2}$, густини нижньої рідини ρ_1 . Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$x = Lx^*, \quad z = Hz^*, \quad \eta_j = a\eta_j^*, \quad j = 1, 2, 3, \quad t = \frac{L}{\sqrt{gH}} t^*$$
(6)

$$\varphi_j = \frac{gL a}{\sqrt{gH}} \varphi_j^*, \quad T_j = L^2 \rho_1 g T_j^*, \quad \rho_j = \rho_1 \rho_j^*, \quad j = 1, 2, 3$$

Позначивши величини $\alpha = \frac{a}{H}$, $\beta = \frac{H^2}{L^2}$ перепишемо систему (1)-(5) у безрозмірних величинах

$$\varphi_{j,x^*x^*}^* + \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z^*z^*}^* = 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3$$
(7)

кінематичні умови на поверхнях контакту

$$\eta_{1,t^*}^* - \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z^*}^* = -\alpha \varphi_{j,x^*}^* \eta_{1,x^*}^* \text{ при } z^* = \alpha \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2$$
(8)

$$\eta_{2,t^*}^* - \frac{1}{\beta} \varphi_{j,z^*}^* = -\alpha \varphi_{j,x^*}^* \eta_{2,x^*}^* \text{ при } z^* = \frac{h_2}{H} + \alpha \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3$$
(9)

динамічні умови на поверхня контакту та поверхні з кришкою

$$\begin{aligned} & \varphi_{1,t}^* - \rho_2 \varphi_{2,t}^* + g(1 - \rho_2) \eta_1^* + \frac{1}{2} \alpha \left(\left(\varphi_{1,x}^* \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\varphi_{1,z}^* \right)^2 \right) - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \rho_2 \left(\left(\varphi_{1,x}^* \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\varphi_{1,z}^* \right)^2 \right) - T_1 \left(1 + \alpha^2 \beta \left(\eta_{1,x}^* \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \eta_{1,x}^* = 0 \\ & \text{при } z^* = \alpha \eta_1(x, t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \varphi_{1,t}^* - \rho_3 \varphi_{2,t}^* + g(\rho_2 - \rho_1) \eta_2^* + \frac{1}{2} \alpha \rho_2 \left(\left(\varphi_{1,x}^* \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\varphi_{1,z}^* \right)^2 \right) - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \rho_3 \left(\left(\varphi_{1,x}^* \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\varphi_{1,z}^* \right)^2 \right) - T_2 \left(1 + \alpha^2 \beta \left(\eta_{2,x}^* \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \eta_{2,x}^* = 0 \\ & \text{при } z^* = \frac{h_2}{H} + \alpha \eta_2(x, t) \end{aligned} \quad (11)$$

гранична умова на дні

$$\varphi_{1,z}^* = 0 \quad \text{при } z^* = -\frac{h_1}{H} \quad (12)$$

гранична умова на кришці

$$\varphi_{3,z}^* = 0 \quad \text{при } z^* = \frac{h_2 + h_3}{H} + \alpha \eta_3(x, t), \quad (13)$$

де α, β – коефіцієнти нелінійності, $\rho_i = \rho_1 \rho_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) – відношення густин рідких шарів.

Вважаємо, що коефіцієнт не лінійності α значно менший за одиницю, тому дана модель описує слабо нелінійну тришарову систему з дисперсією. Для полегшення записів далі зірочку опускатимемо. Оскільки характерна довжина L рівна характерній товщині H , то $\beta = 1$.

Для розв'язування задачі використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Представимо шукані функції відхилення першої та другої поверхонь контакту, відхилення вільної поверхні та потенціали швидкостей у вигляді

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3 \quad (14)$$

$$\varphi(x, t, z) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

де $x_j = \alpha^j x$ та $t_j = \alpha^j t$ ($j=0, 1, 2$).

Підставляючи (14) – (15) у (7) – (13) та прирівнюючи вирази при однакових степенях α , отримаємо три лінійні задачі.

задача першого наближення (при α^0)

$$\varphi_{j1, x_0 x_0} + \varphi_{j1, zz} = 0 \quad y, \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\eta_{11, t_0} - \varphi_{j1, z} = 0 \quad \text{на } z = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\eta_{21, t_0} - \varphi_{j1, z} = 0 \quad \text{на } z = h_2, \quad j = 2, 3$$

$$\varphi_{11, t_0} - \rho_2 \varphi_{21, t_0} + (1 - \rho_2) \eta_1 - T_1 \eta_{1, x_0 x_0} = 0 \quad \text{на } z = 0$$

$$\rho_2 \varphi_{21, t_0} - \rho_3 \varphi_{31, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_2 - T_2 \eta_{2, x_0 x_0} = 0 \quad \text{на } z = h_2$$

$$\varphi_{11, z} = 0 \quad \text{на } z = -h_1.$$

$$\varphi_{31, z} = 0 \quad \text{при } z = h_2 + h_3$$

(16)

задача другого наближення (при α^1)

$$\varphi_{j2, x_0 x_0} + \varphi_{j2, zz} = -2\varphi_{11, x_0 x_1} y, \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\eta_{12, t_0} - \varphi_{j2, z} = -\eta_{11, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{11, t_1} + \eta_{11} \varphi_{j1, zz} \quad \text{на } z = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\eta_{22, t_0} - \varphi_{j2, z} = -\eta_{21, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{21, t_1} + \eta_{21} \varphi_{j1, zz} \quad \text{на } z = h_2, \quad j = 2, 3$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12, t_0} - \rho_2 \varphi_{22, t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12, x_0 x_0} = & -\varphi_{11, t_1} - \eta_{11} \varphi_{11, t_0 z} + \rho_2 (\varphi_{21, t_1} + \eta_{11} \varphi_{21, t_0 z}) - \\ & - \frac{1}{2} ((\varphi_{11, x_0})^2 + (\varphi_{11, z})^2) + \frac{1}{2} \rho_2 ((\varphi_{21, x_0})^2 + (\varphi_{21, z})^2) + 2T_1 \eta_{11, x_0 x_1} \\ & \text{на } z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + g(\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22,x_0 x_0} = -\rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{21} \varphi_{21,t_0 z}) + \\ & + \rho_3 (\varphi_{31,t_1} + \eta_{31} \varphi_{31,t_0 z}) - \frac{1}{2} \rho_2 ((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + \frac{1}{2} \rho_3 ((\varphi_{31,x_0})^2 + (\varphi_{31,z})^2) + \\ & + 2T_2 \eta_{21,x_0 x_1} \end{aligned}$$

на $z = h_2$

$$\varphi_{32,z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3$$

$$\varphi_{12,z} = 0 \text{ на } z = -h_1. \quad (17)$$

задача третього наближення (при α^2)

$$\varphi_{j3,x_0 x_0} + \varphi_{j3,zz} = -\varphi_{11,x_1 x_1} - 2\varphi_{j1,x_0 x_2} - 2\varphi_{j2,x_0 x_1} y, \Omega_j, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \eta_{13,t_0} - \varphi_{j3,z} = & -\eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{11,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_{11,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{12,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{11,t_2} - \\ & - \eta_{12,t_1} + \eta_{11} \varphi_{j2,zz} + \eta_{12} \varphi_{j1,zz} + \frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{j1,zzz} - \eta_{11} \eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_0 z} \end{aligned}$$

на $z = 0, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \eta_{23,t_0} - \varphi_{j3,z} = & -\eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{21,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_{21,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{22,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{21,t_2} - \\ & - \eta_{22,t_1} + \eta_{21} \varphi_{j2,zz} + \eta_{22} \varphi_{j1,zz} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{j1,zzz} - \eta_{21} \eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_0 z} \end{aligned}$$

на $z = h_2, j = 2, 3$

$$\begin{aligned} \varphi_{13,t_0} - \rho_2 \varphi_{23,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{13} - T_1 \eta_{13,x_0 x_0} = & -\varphi_{12,t_1} - \varphi_{11,t_2} - \eta_{12} \varphi_{11,t_0 z} - \eta_{11} \varphi_{11,t_1 z} - \\ & - \frac{1}{2} \eta_{12}^2 \varphi_{11,t_0 zz} + \rho_2 (\varphi_{22,t_1} + \varphi_{21,t_2} + \eta_{12} \varphi_{21,t_0 z} + \eta_{11} \varphi_{21,t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{12}^2 \varphi_{21,t_0 zz}) - \\ & - (\eta_{11} \varphi_{12,t_0 z} + \varphi_{11,x_0} \varphi_{12,x_1} + \varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_1} + \eta_{11} \varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_0 z} + \varphi_{11,z} \varphi_{12,z} + \eta_{11} \varphi_{11,z} \varphi_{11,zz}) + \\ & + \rho_2 (\eta_{11} \varphi_{22,t_0 z} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_1} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + \eta_{11} \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_0 z} + \varphi_{21,z} \varphi_{22,z} + \eta_{11} \varphi_{21,z} \varphi_{21,zz}) + \\ & + T_1 (2\eta_{12,x_0 x_1} + 2\eta_{12,x_0 x_2} + \eta_{11,x_1 x_1}) - \frac{3}{2} T_1 (\eta_{11,x_0})^2 \eta_{11,x_0 x_0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_2 \varphi_{23,t_0} - \rho_2 \varphi_{33,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{23} - T_2 \eta_{23,x_0 x_0} = -\rho_2 (\varphi_{22,t_1} + \varphi_{21,t_2} + \eta_{22} \varphi_{21,t_0 z} + \\
 & + \eta_{21} \varphi_{21,t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{22}^2 \varphi_{21,t_0 z z}) + \rho_3 (\varphi_{32,t_1} + \varphi_{31,t_2} + \eta_{22} \varphi_{31,t_0 z} + \eta_{21} \varphi_{31,t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{22}^2 \varphi_{31,t_0 z z}) - \\
 & - \rho_2 (\eta_{21} \varphi_{22,t_0 z} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_1} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + \eta_{21} \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_0 z} + \varphi_{21,z} \varphi_{22,z} + \eta_{21} \varphi_{21,z} \varphi_{21,zz}) + \\
 & + \rho_3 (\eta_{21} \varphi_{32,t_0 z} + \varphi_{31,x_0} \varphi_{32,x_1} + \varphi_{31,x_0} \varphi_{31,x_1} + \eta_{21} \varphi_{31,x_0} \varphi_{31,x_0 z} + \varphi_{31,z} \varphi_{32,z} + \eta_{21} \varphi_{31,z} \varphi_{31,zz}) + \\
 & + T_2 (2\eta_{22,x_0 x_1} + 2\eta_{22,x_0 x_2} + \eta_{21,x_1 x_1}) - \frac{3}{2} T_2 (\eta_{21,x_0})^2 \eta_{21,x_0 x_0} = 0 \\
 & \varphi_{13,z} = 0 \text{ на } z = -h_1. \\
 & \varphi_{33,z} = 0 \text{ на } z = h_2 + h_3.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Отже, отримано задачі перших трьох наближень, невідомими в яких є функції $\eta_{11}, \eta_{21}, \eta_{12}, \eta_{22}, \eta_{13}, \eta_{23}, \varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}, \varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{32}, \varphi_{13}, \varphi_{23}, \varphi_{33}$, які визначають доданки багатомасштабних розвинень для потенціалів та відхилення поверхні контакту рідин і вільної поверхні.

Розв'язки першого наближення. В результаті розв'язання задачі першого порядку та підстановки розв'язків у динамічну умову для другої поверхні контакту (11), отримано наступне дисперсійне співвідношення:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_2^2 \omega^4}{\sinh^2(kh_2)} - ((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 (\coth(kh_1) + \rho_2 \coth(kh_2))) \times \\
 & \times ((\rho_2 - \rho_3)k + T_1 k^3 - \omega^2 (\coth(kh_2) - \rho_3 \coth(kh_3))) = 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Отримане дисперсійне рівняння має дві пари незалежних розв'язків:

для моди ω_1 :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{11}^{(1)} &= \frac{2\omega_1}{k \sinh(kh_1)} \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) A \sin(kx - \omega_1 t) \\
 \varphi_{21}^{(1)} &= - \left(\frac{2\omega_1 \operatorname{ch}(k(h_2 - z))}{k \sinh(kh_2)} + \frac{2((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2)) \operatorname{ch}(kz)}{\rho_2 \omega_1 k} \right) \cdot \\
 & \cdot A \sin(kx - t\omega_1)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{31}^{(1)} = \frac{2 \cdot \operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2)) \operatorname{ch}(k(h_2 + h_3 - z))}{\rho_2 \omega_1 k}.$$

$$\cdot A \sin(kx - t\omega_1)$$

$$\eta_{11}^{(1)} = 2A \cos(kx - \omega_1 t)$$

$$\eta_{21}^{(1)} = -\frac{\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\omega_1^2 \rho_2} 2A \cos(kx - \omega_1 t)$$

(20)

для моди ω_2 :

$$\varphi_{11}^{(2)} = -\frac{2\rho_2 \omega_2^3 \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \cdot \operatorname{sh}^2(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))}$$

$$\varphi_{21}^{(2)} = \left(\frac{\rho_2 \omega_2^2}{\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))} \operatorname{ch}(k(h_2 - z)) + \operatorname{ch}(kz) \right) \cdot \frac{2\omega_2 B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \sin(kh_2)}$$

$$\varphi_{31}^{(2)} = -\frac{2\omega_2 \operatorname{ch}(k(h_2 + h_3 - z)) B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \sin(kh_3)}$$

$$\eta_{11}^{(2)} = -\frac{2B \cos(kx - \omega_2 t) \omega_2^2 \rho_2}{\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))}$$

$$\eta_{21}^{(2)} = 2B \cos(kx - \omega_2 t)$$

(21)

Де $\eta_{21}^{(1)}$ є внутрішньою прогресивною хвилею-відгуком на внутрішню хвилю $\eta_{11}^{(1)}$ з частотою ω_1 та амплітудою A на нижній поверхні контакту. А $\eta_{21}^{(2)}$ є відповідно внутрішньою хвилею-відгуком на внутрішню хвилю $\eta_{11}^{(2)}$ з частотою ω_2 та амплітудою B , яка поширюється на верхній поверхні контакту між другим та третім шаром.

Енергія хвильового руху у граничному випадку. Розглянемо енергію, яку переносять за період τ прогресивні хвилі, що задаються розв'язками (21) та (23), через площину $x = \text{const}$ на поверхнях контакту та на поверхні шару з твердою кришкою. Тоді згідно [6] мають місце формули

$$E_{vn1} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (22)$$

$$E_{vn2} = -\frac{\rho_2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz \quad (23)$$

$$E_{vn3} = -\frac{\rho_3}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2+h_3} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (24)$$

За формулами (22)–(24) обчислимо енергію, яку переносять внутрішні хвилі у шарі з твердим дном, середньому шарі та шарі з кришкою відповідно; $E_s = E_{vn1} + E_{vn2} + E_{vn3}$ – сумарна енергія тришарової системи. При цьому відхилення поверхонь контакту та поверхні з кришкою задаються наступним чином

$$\eta_{11} = \eta_{11}^{(1)} + \eta_{11}^{(2)}, \quad \eta_{21} = \eta_{21}^{(1)} + \eta_{21}^{(2)}, \quad \eta_{31} = \eta_{31}^{(1)} + \eta_{31}^{(2)} \quad (25)$$

Отримані результати будемо порівнювати з розрахунком енергії, що переносить хвиля в гідродинамічній системі «рідкий шар – шар з кришкою», який виконано в [4]. Розв'язки цієї задачі в лінійній постановці мають наступний вигляд

$$\eta_1 = 2A \cos(kx_0 - \omega t_0)$$

$$\varphi_{11} = \frac{2\omega}{k} A \sin(kx_0 - \omega t_0) \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)}$$

$$\varphi_{21} = -\frac{2\omega}{k} A \sin(kx_0 - \omega t_0) \frac{\text{ch}(k(h_2 - z))}{\text{sh}(kh_2)}$$

Енергія, яку переносить хвиля у такій системі, обчислюється наступним чином

$$E_{k1} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h}^0 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} dz$$

$$E_{k2} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} dz$$

Розглянемо залежності енергії від товщини нижнього шару h_1 у тришаровій системі (22) - (24) та залежність енергії від товщини шару h у двошаровій системі.

Граничний випадок описується рівністю густин $\rho_2 = \rho_3 = 0.9$, $\rho = 0.9$. Товщина шару $h = h_2 + h_3$ та амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $A = 0.5$. У цьому випадку отримуємо двошарову систему «шар з твердим дном – шар з кришкою». На рис. 2 показана залежність E_{vn1} , E_{vn2} , E_{vn3} , $E_{vn1} + E_{vn2} + E_{vn3}$ та E_{k1} , E_{k2} , $E_{k1} + E_{k2}$ від товщини нижнього шару для наступних параметрів $k = 0.5$, $h = h_2 = h_3 = 1$, $T = T_1 = T_2 = 0$, $B = 0$, $t = 0$, $x = 0$.

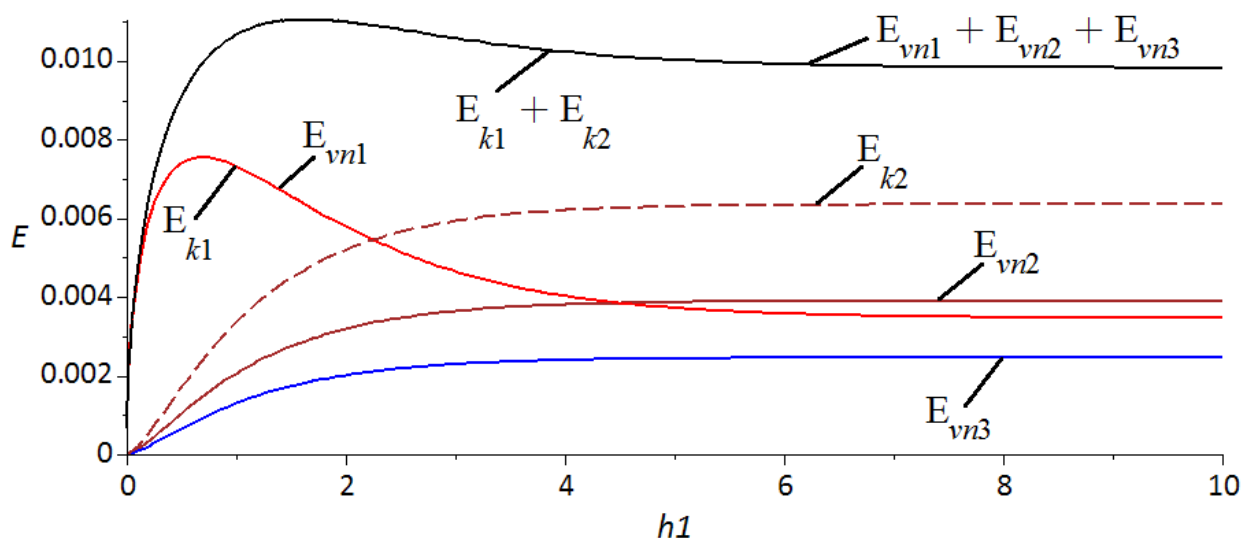


Рис. 2

Як помітно з рис. 2 що енергія системи $E_{vn1} + E_{vn2} + E_{vn3}$ наближається до енергії системи $E_{k1} + E_{k2}$. Отже, для довгих хвиль малої амплітуди сума енергій, що переносяться внутрішньою та поверхневою хвилями наближається до енергії, що відповідає поверхневій хвилі у шарі з вільною поверхнею за умови $h_1 \rightarrow \infty$. Тришарова система «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» вироджується у двошарову систему «шар з твердим дном – шар з кришкою».

Висновок. У даній статті було досліджено проблему поширення енергії внутрішніх хвиль у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – рідкий шар – шар з кришкою». Отримано дисперсійне співвідношення, яке має дві пари незалежних коренів. Розглянуто енергію, яку переносять за період внутрішні прогресивні хвилі на поверхнях контакту та на поверхні шару з твердою кришкою. У граничному випадку при рівних значеннях густини тришарова система «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» вироджується у двошарову систему «шар з твердим дном – шар з кришкою», що підтверджує достовірність отриманих результатів.

ПОСИЛАННЯ

- [1] Avramenko, O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018. – 229(3). – P. 241–252.
- [2] Avramenko, O., Lunyova M. Analysis of internal waves energy in a three-layered semi-infinite hydrodynamic system. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2018. – 5(92). – P. 26-33.
- [3] Hurtovyi, Yu., Naradovyi V., Bohdanov V. Analysis of conditions of propagation of internal waves in three-layer liquid of finite depth. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2018. – 5(93). – P. 38-46.
- [4] Selezov, I.T., Avramenko O. V., Gurtovyi Yu. V. Features of the propagation of wave packets in a two-layer hydrodynamic system. *Applied hydromechanics*, 2005. – 7(79). – P. 80–89.
- [5] Selezov, I.T., Avramenko O. V., Gurtovyi Yu. V., Naradovyi V. V. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010. – 168(4). – P. 590–602.
- [6] Tarapov I. E. *Continuum Mechanics: Vol. 3, Mechanics of Inviscid Liquid* [in Russian], Zolotye Stranitsy, Kharkov., 2005.